

1. Zápočtová Písemka A NOFY151, 2025-26

Jméno a přímení:.....

vyplní student

.....%

nevyplní student

Otázky

1. Spočtete následující limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \right)^{\sqrt{x}}$$

(váha : 6)

2. Spočtete derivaci následujícího výrazu všude, kde to jde

$$\frac{\arcsin(\tan(x))}{\ln^2(x+1)}$$

(váha : 4)

Písemka A vzorové řešení

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}))^{\sqrt{x}}$$

$$\text{Jelikož } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

máme, díky VOLSF, když přejdeme limitou do mocniny

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \ln \left(1 + \underbrace{\sin \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}_{\textcircled{A}} \right) \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}}_{\textcircled{B}} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Použijeme známé limity u $\textcircled{A}$ totiž

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \quad \text{kde } t = \sin \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{a u } \textcircled{B} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin(s)}{s} = 1 \quad s = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

a VOLSF. Pak počítáme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \text{ díky VOAL}$$

Shrnutím, díky VOAL je $\textcircled{*} = \frac{1}{2}$. Pak díky

$$\text{VOLSF máme } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}))^{\sqrt{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \textcircled{*}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

$$② \quad f(x) = \frac{\arcsin(\operatorname{tg} x)}{\ln^2(x+1)}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x: x > -1\} \cap \{x: \operatorname{tg} x \in [-1, 1]\} \cap \{\ln(x+1) \neq 0\} \\ &= (-1, \infty) \cap \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Použijeme Řetězkové pravidlo a derivace podílu.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \ln^2(x+1) - \arcsin(\operatorname{tg} x) \cdot 2 \ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}}{\ln^4(x+1)}.$$

Výraz platí na celé D_f .